

# Die Stromfunktion $\Psi$ - Theorie

Die Stromfunktion  $\Psi$  ist "ein skalares Feld, dessen Beziehung zu  $v$  *sorgfältig gewählt ist*, so dass automatisch *Kontinuität vorliegt*"<sup>(1)</sup>, wobei  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit der Strömung ist:

$$\mathbf{v} = f(\Psi) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$\mathbf{v}$  kann durch die Rotation eines anderen Vektors  $\mathbf{u}$  ausgedrückt werden, daher ist  $\mathbf{u}$  das *Vektor-Potential* von  $\mathbf{v}$ <sup>(1)</sup>:

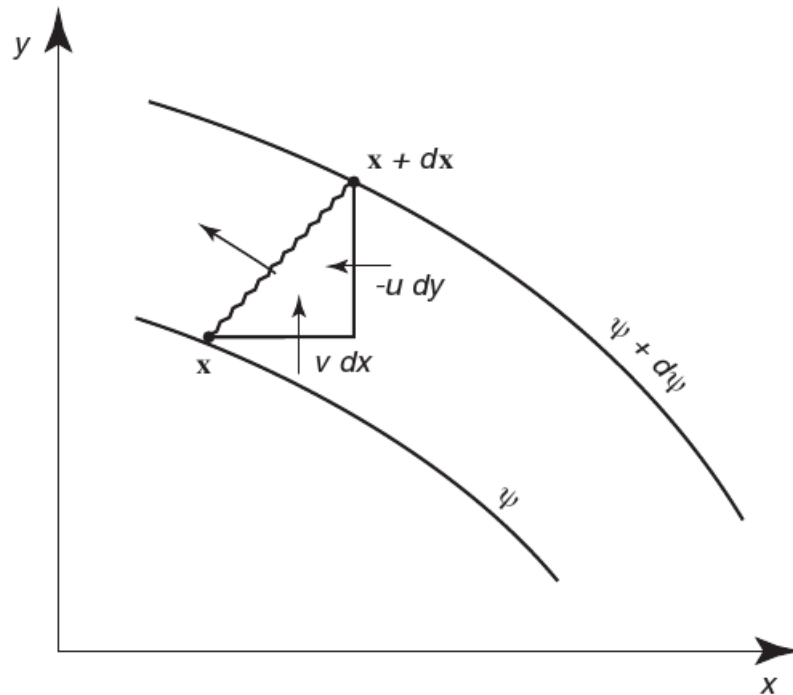
$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Beispiel: 2-D Strömung<sup>(1)</sup>,  $\mathbf{v} = v_x(x,y)\mathbf{e}_x + v_y(x,y)\mathbf{e}_y$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \times [\Psi(x,y) \mathbf{e}_z] \\ &= \nabla \Psi \times \mathbf{e}_z + \Psi \nabla \times \mathbf{e}_z \\ &= (\partial_x \Psi \mathbf{e}_x + \partial_y \Psi \mathbf{e}_y) \times \mathbf{e}_z \\ &= \partial_x \Psi \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z + \partial_y \Psi \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \\ &= -\partial_x \Psi \mathbf{e}_y + \partial_y \Psi \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad \rightarrow \quad v_x = \partial_y \Psi \equiv u, \quad v_y = -\partial_x \Psi \equiv v$$

# Die Stromfunktion $\Psi$ -Eigenschaften

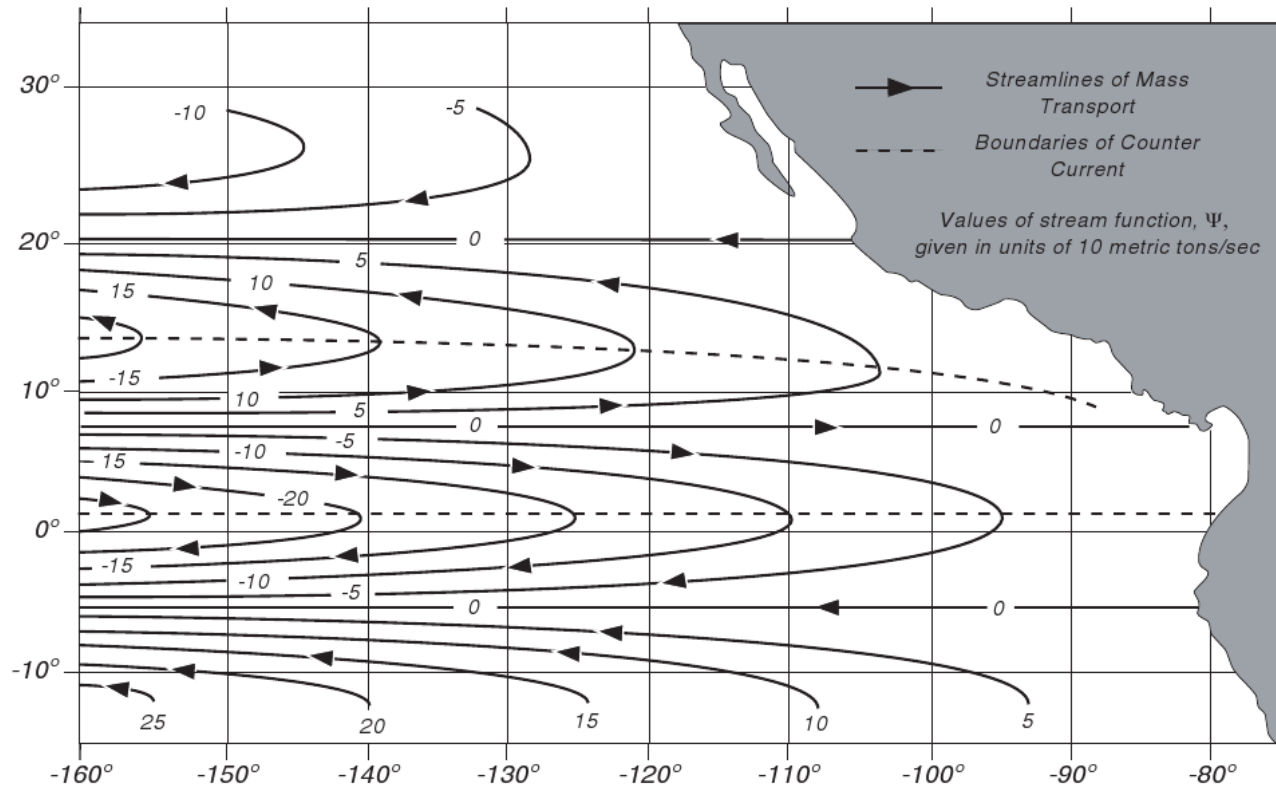
In Übung 4, Aufgabe 1 haben wir gezeigt, dass für konstanten Fluss die Positionen der Strömungselemente einer **Stromlinie** folgen. Diese ist definiert durch  $\Psi = \text{const.}$



Die Abbildung<sup>(2, figure 11.1)</sup> zeigt eine interessante Eigenschaft der Stromfunktion: Der Volumenfluss  $V$  zwischen zwei Stromlinien ist gleich der Differenz  $d\Psi$  der Werte ihrer Stromfunktion.

$$V = v dx + (-u) dy = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -d\Psi$$

# Beispiel: Massentransport im Ozean



Stromlinien des Massentransports im östlichen Pazifik, berechnet nach Sverdrup's theory<sup>(2, figure 11.1)</sup>

# Quellen

- (1) [http://www.andrew.cmu.edu/course/06-703/Stream\\_Function.pdf](http://www.andrew.cmu.edu/course/06-703/Stream_Function.pdf) (ersetze " " durch ein einzelnes Leerzeichen)
- (2) [http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng\\_textbook/PDF\\_files/book.pdf](http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/PDF_files/book.pdf)